I) 1) a) Force centrale = * tjs dirigée vers un point fixe C de $\mathcal{R}$, appelée centre de force (ici, P = fixe, car origine de $\mathcal{R}$).

* L'intensité de la force ne dépend que de $r = CM = PM$.

b) $\vec{F}_{P\to A} = -\dfrac{GMm}{PA^2}\vec{e}_{PA} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{F}_{P\to A}\| = \dfrac{GMm}{PA^2} = \dfrac{GMm}{r^2} \\ \vec{e}_{PA} \text{ dirigée vers } P \text{ fixe ds } \mathcal{R}. \end{cases} \Rightarrow$ centrale

c) Force conservative = si son travail est indépendant du chemin suivi.

d) $\delta W(\vec{F}_{P\to A}) = \vec{F}_{P\to A} \cdot \vec{dl} = -\dfrac{GMm}{r^2}dr = d\left(\dfrac{GMm}{r}\right)$ = diff. tot. exacte.

$\Rightarrow W = \int \delta W$ ne dépend que des bornes d'arrivée et départ.

e) $\vec{L}_P(A/\mathcal{R}) = \vec{PA} \times m\vec{v}(A/\mathcal{R})$

f) $\left[\dfrac{d\vec{L}_P(A/\mathcal{R})}{dt}\right]_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_P(\Sigma\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_P(\vec{F}_{P\to A}) = \vec{PA} \times \vec{F}_{P\to A} = \vec{0}$.

Donc $\vec{L}_P(A/\mathcal{R}) = \vec{cte} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L}_P(A/\mathcal{R}) \text{ a une direction fixe} \\ L = \|\vec{L}_P(A/\mathcal{R})\| = cte. \end{cases}$

g) La trajectoire de A dans $\mathcal{R}$ se fait dans un plan qui contient P

2) a) $d\mathcal{E}_p = -\delta W \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\dfrac{GMm}{r} + \cancel{cte}$.

b) le système est isolé $\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}^{\text{non cons}}) = 0$

TPM : $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}^{\text{non cons}}) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m = cte$.

c) $\mathcal{E}_m = cte = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GmM}{r} = \dfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$.

$\Rightarrow v^2 = v_i^2 + 2\dfrac{GM}{r}$

3) a) p = paramètre (m) - e = excentricité et $e > 1$ (hyperbole) (ss dim.)

b) $L = m\|\vec{PA} \times \vec{v}\| = m\|(\vec{PB} + \vec{BA_i}) \times \vec{v_i}\| = m\|\vec{PB} \times \vec{v_i}\| = m b_i v_i$.

c) $\|\vec{L}\| = cte \Rightarrow \|r\vec{e}_r \times r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\| = r^2\dot{\theta} = rv = cte$

Donc $rv = b_i v_i \Rightarrow b_i = r\dfrac{v}{v_i} = r\sqrt{1 + \dfrac{2GM}{rv_i^2}}$

d) $p = \dfrac{L^2}{GMm^2} = \dfrac{r^2v^2}{GM} = \dfrac{b_i^2v_i^2}{GM} = \dfrac{1}{GM}r^2v_i^2\left(1 + \dfrac{2GM}{rv_i^2}\right) = \dfrac{r^2v_i^2}{GM} + 2$.

$e = \sqrt{1 + \dfrac{v_i^2 b_i^2 v_i^2}{G^2M^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \dfrac{b_i^2v_i^4}{G^2M^2} = 1 + \dfrac{p^2}{b_i^2} \Rightarrow b_i = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$

e) $p = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow b = \sqrt{ap} = \sqrt{\dfrac{p^2}{e^2-1}} = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}} \Rightarrow b = b_i$.

f) $r_{min} = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1+e} \Rightarrow b_i = r_{min}\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}} = b$

g) $v = \sqrt{v_i^2 + \dfrac{2GM}{r}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{v_i^2 + \dfrac{2GM}{r_{min}}} = \sqrt{v_i^2 + 2\dfrac{GMp}{1+e}}$

$\boxed{I}$

1) $\vec{\Omega}(R/R_0) = \omega \vec{e}_z$

2) a- $\vec{v}(M/R) = \left[\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right]_R = \dot{x}\,\vec{e}_x$

b- $\vec{v}_e(M,R/R_0) = \vec{v}(O\in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0)\times\vec{OM} = +\omega x\,\vec{e}_y$

c- $\vec{a}(M/R) = \left[\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right]_R = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

d- $\vec{a}_e(M,R/R_0) = \underbrace{\vec{a}(O\in R/R_0)}_{=0} + \vec{\Omega}(R/R_0)\times\left[\vec{\Omega}(R/R_0)\times\vec{OM}\right] + \underbrace{\left[\dfrac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}\right]_{R_0}}_{=0}\times\vec{OM}$

$= -\omega^2 x\,\vec{e}_x$

e- $\vec{a}_c(M,R/R_0) = 2\vec{\Omega}(R/R_0)\times\vec{v}(M/R) = 2\omega\dot{x}\,\vec{e}_y$

3) LCV = $\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R) + \vec{v}_e(M,R/R_0)$

LCA = $\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R) + \vec{a}_e(M,R/R_0) + \vec{a}_c(M,R/R_0)$

4) $\vec{F}_{ie}(M,R/R_0) = -m\vec{a}_e(M,R/R_0)$ et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M,R/R_0)$

5) $\sum\vec{F}_{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$ et $\vec{R}\perp\vec{e}_x$ (ssans frottements)

$\Rightarrow \vec{R} = R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$.

6) $\sum\vec{F}_{ext}(M/R) = m\vec{a}(M/R)$

7) Il faut éliminer $\vec{R}$ inconnue, donc projeter sur Ox.

$\Rightarrow \underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e}_x}_{0} + \underbrace{\vec{R}\cdot\vec{e}_x}_{0} + \vec{F}_{ie}\cdot\vec{e}_x + \vec{F}_{ic}\cdot\vec{e}_x = m\vec{a}(M/R)\cdot\vec{e}_x$

$\Leftrightarrow m\omega^2 x = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0$